

Research Article

Investigation of Stability and Performance of the Extended Hyperchaotic Chen System

Hadi Soheili Rad¹, M. Sc., Elahe Moradi*², Assistant Professor

¹ Department of Electrical Engineering, Y.I.C., Islamic Azad University, Tehran, Iran.
h.soheili97@gmail.com

² Department of Electrical Engineering, Y.I.C., Islamic Azad University, Tehran, Iran.
Elahe.Moradi@iau.ac.ir

Abstract:

Chaotic systems possess unique and complex characteristics, with one of their most notable features being extreme sensitivity to initial conditions. Even negligible differences in initial conditions can lead to vastly divergent trajectories over time, making the study of their stability and performance a critical research area. In this paper, a novel hyperchaotic system, derived from the extended hyperchaotic Chen system, is proposed and comprehensively analyzed. The hyperchaotic behavior of this system is verified by calculating Lyapunov exponents and investigating its open-loop dynamics. The increased complexity of this system, compared to conventional nonlinear systems, makes it highly suitable for secure communication applications by significantly enhancing network security and data protection. Moreover, its inherent properties enable its use as a robust and reliable carrier system in telecommunication networks. The dynamic behavior of the proposed system is thoroughly simulated using MATLAB, and the results demonstrate the effectiveness and potential of the introduced method in practical applications.

Keywords: Chaos, Stability, Extended Chen System, Hyperchaotic System.

Received: 27 Dec. 2024

Revised: 24 Mar. 2025

Accepted: 8 Apr. 2025

* **Corresponding Author:** Dr. Elahe Moradi

Citation: H. Soheili Rad, E. Moradi “Investigation of Stability and Performance of the Extended Hyperchaotic Chen System”, Journal of Novel Researches on Smart Power Systems, vol. 14, no. 1, pp. 1-8, June 2025 (in Persian).

مقاله پژوهشی

بررسی پایداری و عملکرد سیستم فوق آشوبناک توسعه یافته چن

هادی سهیلی راد^۱، کارشناسی ارشد، الهه مرادی^{۲*}، استادیار

۱- گروه مهندسی برق، دانشگاه آزاد اسلامی واحد یادگار امام خمینی (ره) شهرری، تهران، ایران، h.soheili97@gmail.com

۲- گروه مهندسی برق، دانشگاه آزاد اسلامی واحد یادگار امام خمینی (ره) شهرری، تهران، ایران، Elahe.Moradi@iau.ac.ir

چکیده: سیستم‌های آشوب دارای ویژگی‌های منحصر به فردی هستند که یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های آن حساسیت زیاد به شرایط اولیه است. در سیستم‌های آشوبناک تفاوت بسیار کوچکی در شرایط اولیه، باعث تفاوت بسیار در وضعیت آن در لحظات بعد خواهد شد. لذا بررسی پایداری و عملکرد سیستم‌های آشوب از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در این مقاله، یک سیستم فوق آشوبناک جدید بر پایه سیستم فوق آشوبناک چن معرفی می‌گردد. اثبات رفتار فوق آشوبناک این سیستم با استفاده از محاسبه نماهای لیاپانوف و ارزیابی رفتار حلقه باز سیستم انجام گرفته است. پیچیدگی بیشتر این سیستم‌ها نسبت به اکثر سیستم‌های غیرخطی، کارآمدی این سیستم‌ها را در زمینه مخابرات امن بالاتر می‌برد و موجب افزایش امنیت شبکه می‌گردد. بنابراین از این سیستم‌ها می‌توان به عنوان سیستم حامل در شبکه‌های مخابراتی استفاده نمود. شبیه‌سازی رفتار این سیستم توسط محیط نرم‌افزار متلب انجام شده است و نتایج شبیه‌سازی نیز کارایی روش ارائه شده را به خوبی نشان می‌دهند.

کلمات کلیدی: آشوب، پایداری، سیستم تعمیم‌یافته چن، سیستم فوق آشوبناک

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱۰/۰۷

تاریخ بازنگری: ۱۴۰۴/۱/۵

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۱/۲۰

* نام نویسنده مسئول: دکتر الهه مرادی

نشانی نویسنده مسئول: تهران، بزرگراه خلیج فارس، روبروی حرم امام خمینی (ره)، دانشگاه آزاد اسلامی واحد یادگار امام خمینی (ره) شهرری، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، گروه برق

۱- مقدمه

پدیده آشوب یکی از مفاهیم پیچیده و غیرخطی است که در طیف گسترده‌ای از سیستم‌ها، از جمله سیستم‌های مکانیکی، زیستی، الکترونیکی و سیستم‌های مرتبه کسری، ظهور می‌یابد. این دسته از سیستم‌ها، در نگاه اولیه بی‌نظم، تصادفی و غیرقابل پیش‌بینی به نظر می‌رسند، اما با تحلیل‌های بلندمدت می‌توان نوعی الگوی منظم در رفتار آن‌ها شناسایی کرد [۱]. به علت تنوع و کاربردهای وسیع سیستم‌های آشوبی، بررسی پایداری و روش‌های کنترل این سیستم‌ها همواره از موضوعات مورد علاقه و توجه ویژه محققان بوده است. آشوب در دهه‌های اخیر به طور فشرده در علوم، ریاضیات و ارتباطات مهندسی مورد مطالعه قرار گرفته است. ایجاد یا افزایش آشوب و کاربرد آن در رمزگذاری حائز اهمیت است [۲، ۳]. سیستم‌های آشوبناکی مانند سیستم آشوبناک چن، سیستم آشوبناک لورنز [۴، ۵]، سیستم آشوبناک لیو و سیستم‌های آشوبناک کسری از معروف‌ترین و پرکاربردترین سیستم‌های آشوب هستند [۶، ۷].

در سال‌های اخیر تحقیقات زیادی در حوزه پایداری و کنترل سیستم‌های آشوبناک انجام شده است. به طور کلی پایداری سیستم‌های واقعی بر اساس کاربرد آن را می‌توان به دو نوع پایداری مجانبی [۸] و پایداری زمان محدود تفکیک نمود [۹، ۱۰]. از سیگنال‌های آشوبناک می‌توان به عنوان حامل سیگنال‌های پیغام استفاده نمود. با توجه به این نکته که سیگنال حامل باید عیناً در گیرنده ساخته شود تا بتوان پیغام را به‌درستی دریافت نمود به همین دلیل همزمان سازی آشوب توجه بسیاری را به خود جلب کرده است که از آن جمله می‌توان به کارهای پی‌کورا و کارول اشاره نمود [۱۱]. روش‌های لیاپانوف، کنترل تطبیقی [۱۲، ۱۳]، فیدبک خطی [۱۴] و غیرخطی و... از جمله روش‌هایی هستند که برای همزمان سازی آشوب مورد استفاده قرار گرفته‌اند [۱۵، ۱۶].

در مرجع [۱۷] یک روش غیرخطی جدید برای کنترل آشوب در PMSM ارائه شده است. در سیستم مذکور، با حضور عدم قطعیت‌های پارامتری از تکنیک کنترلی جدید بر اساس رویکردهای حالت تطبیقی مقاوم و مد لغزشی برای تخمین کران بالای ترم‌های نامعین، اغتشاشات و ترم‌های غیرخطی استفاده شده است. نویسندگان مرجع [۱۸] از یک کنترل مد لغزشی فازی برای همگام‌سازی دو ژیرسکوپ غیرخطی آشوب تحت نامعینی‌ها و اغتشاشات خارجی بهره گرفته‌اند. در این مقاله، قانون رسیدن موردنیاز برای هدایت مسیر حالت خطای سیستم master-slave به سطح لغزش، توسط مجموعه‌ای از قوانین منطق فازی بر اساس خروجی یک کنترل‌کننده حالت لغزشی استنتاج می‌شود.

مرجع [۱۹] از یک روش یادگیری تقویتی عمیق بدون مدل برای کنترل همگام‌سازی بین دو سیستم آشوب، یکی هدف و دیگری مرجع استفاده کرده است. با تعامل با هدف و مرجع، عامل به طور مداوم استراتژی خود را برای اعمال اغتشاشات به هدف برای همگام‌سازی مسیر هدف با مرجع بهینه می‌کند. این روش با روش قبلی متفاوت است و روش‌های هماهنگ سازی آشوب در این روش، نیاز به دانش قبلی از سیستم‌های آشفته ندارد. در این مقاله روش یادگیری تقویت عمیق را برای چندین سیستم آشوب معمولی (سیستم لورنز، سیستم روسلر، مدار چوا و نقشه لجستیک) اعمال شده است و کارایی آن در کنترل همگام‌سازی بین هدف و مرجع نشان داده شده است. در مرجع [۲۰] بر کنترل آشوب در موتور سنکرون آهنربای دائم با نوسانات آشفته، دینامیک ناشناخته و تأخیر زمانی متغیر متمرکز شده است. با استفاده از کنترل حالت لغزشی تطبیقی بر مبنای کنترل سطح پویا، ابتدا رفتار دینامیکی سیستم برای تسهیل طراحی کنترل‌کننده مورد بررسی قرار گرفته است. در این مدل، اجزای غیرخطی و مرزهای بالای تأخیر زمانی و مشتقات آن‌ها ناشناخته در نظر گرفته شده‌اند. برای مقابله با دینامیک ناشناخته، از شبکه عصبی RBF با قانون تطبیقی بهره گرفته شده است که نیاز به دانستن دقیق مدل و پارامترها را حذف می‌کند. به منظور رفع چالش‌هایی نظیر نوسانات آشفته، پیچیدگی محاسباتی و رفتار ناخواسته در کنترل حالت لغزشی، یک کنترل‌کننده نوآورانه با ترکیب فناوری تطبیقی و شبکه عصبی RBF طراحی شده است.

در این مقاله، یک سیستم فوق آشوبناک جدید بر اساس تعمیم سیستم فوق آشوبناک چن معرفی می‌گردد. از این سیستم می‌توان در مخابرات امن و بهتر مدل کردن فرآیندها نیز استفاده نمود. این سیستم فوق آشوبناک نسبت به سیستم‌های آشوبناک معمولی دارای پیچیدگی بالاتری می‌باشد. به همین خاطر در کاربردهای مخابراتی می‌تواند امنیت را افزایش دهد.

ساختار کلی این مقاله به شرح ذیل تنظیم شده است: در بخش دوم، ساختار کلی سیستم فوق آشوبناک توسعه یافته چن ارائه شده است و سپس با استفاده از نمای لیاپانوف، فوق آشوبناک بودن سیستم جدید بررسی شده است. در بخش سوم، شبیه‌سازی‌های لازم برای بررسی عملکرد سیستم جدید با استفاده از نرم‌افزار متلب انجام شده است. سرانجام، در بخش چهارم نتیجه‌گیری و پیشنهاد برای تحقیقات آتی بیان شده است.

۲- ساختار کلی سیستم آشوبناک تعمیم یافته چن

سیستم آشوبناک چن یک سیستم دینامیکی غیرخطی است که به دلیل رفتار پیچیده توجه محققان را به خود جلب کرده است. ساختار کلی سیستم چن به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x) \\ \dot{y} &= (c - a)x - xz + cy \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن که در آن، $x, y, z \in R$ متغیرهای حالت و $a, b, c \in R$ پارامترهای سیستم می‌باشند [۴]. این سیستم دارای ویژگی‌های کلیدی مانند وابستگی و حساسیت شدید به شرایط اولیه، وجود جاذب‌های عجیب، رفتار غیرخطی و پیچیدگی است. سیستم‌های آشوبناک چن در حوزه‌های مختلفی نظیر فیزیک، ریاضیات، علوم مهندسی، علوم کامپیوتر و اقتصاد مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. از جمله کاربردهای آن می‌توان به موارد ذیل اشاره کرد: مدل‌سازی رفتار بازار سهام، طراحی و کنترل سیستم‌های پیچیده مانند سیستم‌های رباتیک، مدل‌سازی جریان‌های آشفته سیالات، طراحی و پیاده‌سازی مدارات الکترونیکی آشوبناک و رمزنگاری و امنیت اطلاعات. در این بخش، یک سیستم فوق آشوبناک جدید بر اساس تعمیم سیستم فوق آشوبناک چن معرفی می‌گردد. از این سیستم می‌توان در مخابرات امن و بهتر مدل کردن فرآیندها نیز استفاده نمود. این سیستم فوق آشوبناک نسبت به سیستم‌های آشوبناک معمولی دارای پیچیدگی بالاتری می‌باشد. به همین خاطر در کاربردهای مخابراتی می‌تواند امنیت را افزایش دهد. برای اثبات آشوبناک بودن رفتار سیستم، نماهای لیاپانوف سیستم محاسبه شده و در ادامه سیستم شبیه‌سازی شده و نمایش داده شده است. ساختار سیستم فوق آشوبناک چن به صورت رابطه زیر بیان می‌گردد:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) + w \\ \dot{y} = dx + cy - xz \\ \dot{z} = xy - bz \\ \dot{w} = yz + rw \end{cases} \quad (2)$$

که در آن، $x, y, z, w \in R$ متغیرهای حالت و $a, b, r, d, k, c \in R$ پارامترهای سیستم می‌باشند. سیستم تعمیم یافته به صورت رابطه زیر بیان می‌گردد:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) + w \\ \dot{y} = dx + cy - kxz^2 \\ \dot{z} = xy - bz \\ \dot{w} = yz + rw \end{cases} \quad (3)$$

که در آن، $x, y, z, w \in R$ متغیرهای حالت و $a, b, c, d, r, k \in R$ پارامترهای سیستم می‌باشند.

۲-۱- نمای لیاپانوف

نمای لیاپانوف امکان مطالعه پایداری معادلات دیفرانسیل را بدون حل آن‌ها امکانپذیر می‌سازد. با توجه به این که برای مطالعه یک سیستم دینامیکی غیرخطی ضروری است که آن را توسط نگاشت‌ها مورد مطالعه قرار داد، به توصیف نمای لیاپانوف که مطالعه رفتار سیستم‌ها توسط نگاشت را به صورت عددی میسر می‌سازد، پرداخته می‌شود.

برای این که یک سیستم را بی‌نظم نامیده شود، باید نشان داده شود که سیستم وابستگی حساس به شرایط اولیه دارد یعنی این که دو مسیر که خیلی نزدیک به هم شروع می‌شوند خیلی سریع به طور نمایی از هم واگرا شده و آینده متفاوتی پیدا می‌کنند. در ادامه تعریف مذکور برای نگاشت‌های یک بعدی بسط داده می‌شود.

فرض می‌کنیم x_0 نقطه‌ای در لحظه t در روی یک مسیر و $x_0 + d_0$ نقطه‌ای نزدیک به آن در روی مسیر دیگر می‌باشد که d_0 بی‌نهایت کوچک بوده و معرف میزان اولیه جدایی این دو نقطه است.

اگر میزان جدایی این دو نقطه بعد از n تکرار (Iteration) توسط d_n نمایش داده شود و رابطه‌ای به صورت $|d_n| = |d_0|e^{\lambda n}$ ما بین این دو نقطه برقرار کنیم. در این صورت می‌توان λ را به عنوان نمای لیاپانوف معرفی کرد.

الف - با مثبت شدن مقدار λ فاصله دو نقطه در فضای فاز با نگاشت‌های مکرر، به صورت نمایی افزایش می‌یابد، یعنی سیستم به سمت آشوبناک شدن میل پیدا می‌کند.

ب - با منفی شدن مقدار λ می‌توان دریافت که نقطه ثابت، رفتار پایداری را از خود نشان می‌دهد، یعنی سیستم به حالت پایدار می‌رسد.

ج - شرط $\lambda = 0$ نیز معرف حالت حاشیه‌ای است.

با استناد به رابطه بالا و نیز با لگاریتم گرفتن و انجام یک سری اعمال ریاضی، نمای لیاپانوف در نهایت به صورت رابطه زیر به دست می‌آید:

$$l = (1/n) S \text{Ln} |f'(x_i)| \quad (4)$$

عبارت به دست آمده زمانی که مخرج کسر به سمت صفر میل کند دارای حدی است که آن را نمای لیاپانوف می‌نامند [۲۱].

۳- نتایج شبیه‌سازی

پارامترهای سیستم تعمیم یافته به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\begin{aligned} a &= 35 & b &= 3 & c &= 12 \\ d &= 7 & r &= 0.3 & k &= 0.01 \end{aligned}$$

در [۲۲] یک روش جهت محاسبه نمای لیاپانوف بر اساس تئوری فوق ارائه شده است. نماهای لیاپانوف عبارتند از:

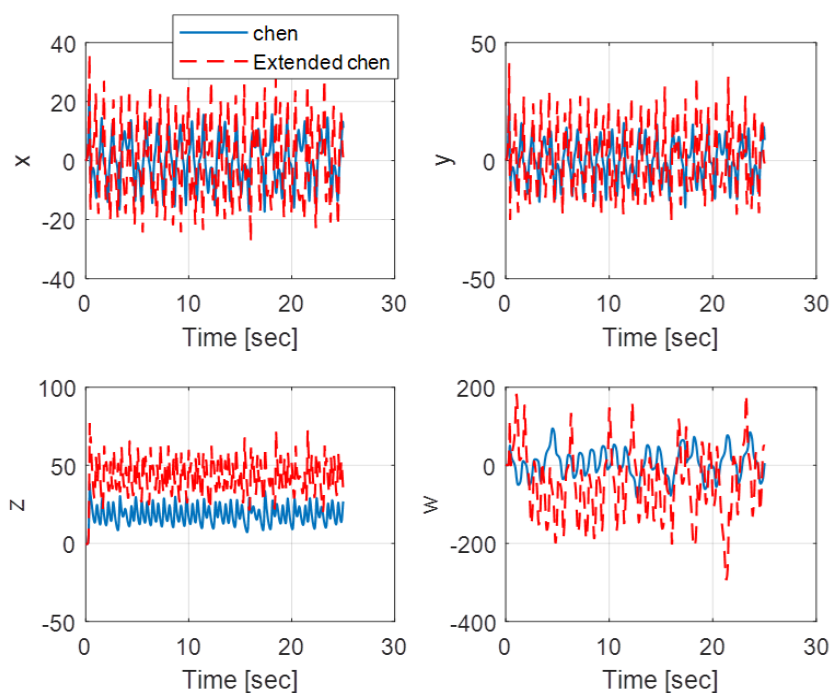
$$\lambda_1 = 1.36 \quad \lambda_2 = 0.0045 \quad \lambda_3 = -0.37 \quad \lambda_4 = -26.5$$

با استفاده از نتایج، سیستم دارای دو نمای لیاپانوف مثبت می‌باشد. وجود این دو نمای لیاپانوف مثبت نشان دهنده فوق آشوبناک بودن سیستم می‌باشد.

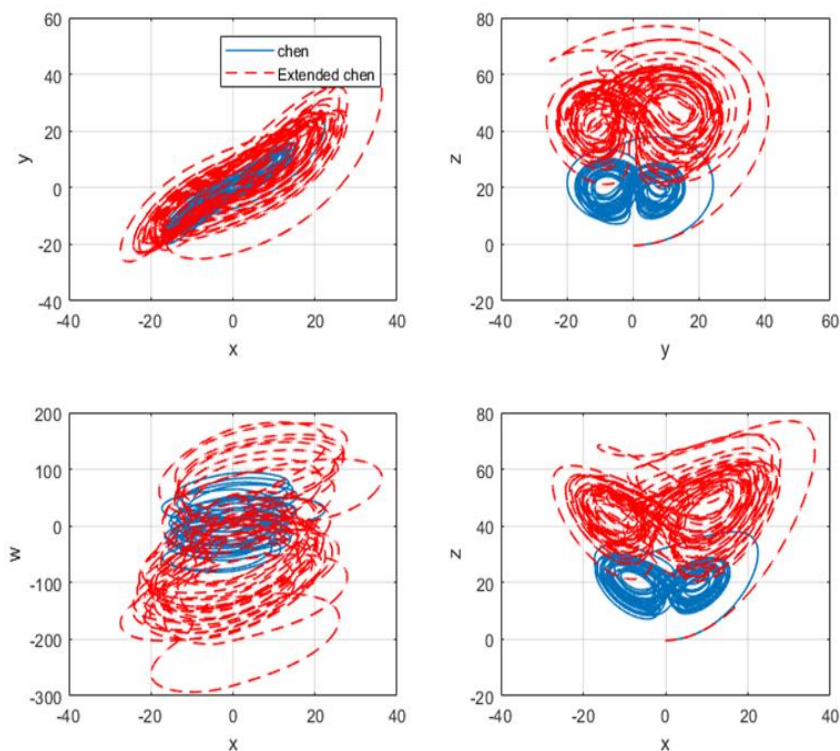
با استفاده از پارامترهای تعیین شده در بخش قبل، مقایسه رفتار سیستم تعمیم یافته چن با سیستم چن، با شرایط اولیه یکسان به صورت شکل‌های (۱) تا (۴) می‌باشد.

$$x_0 = -0.1 \quad y_0 = 0.2 \quad z_0 = -0.6 \quad w_0 = 0.4$$

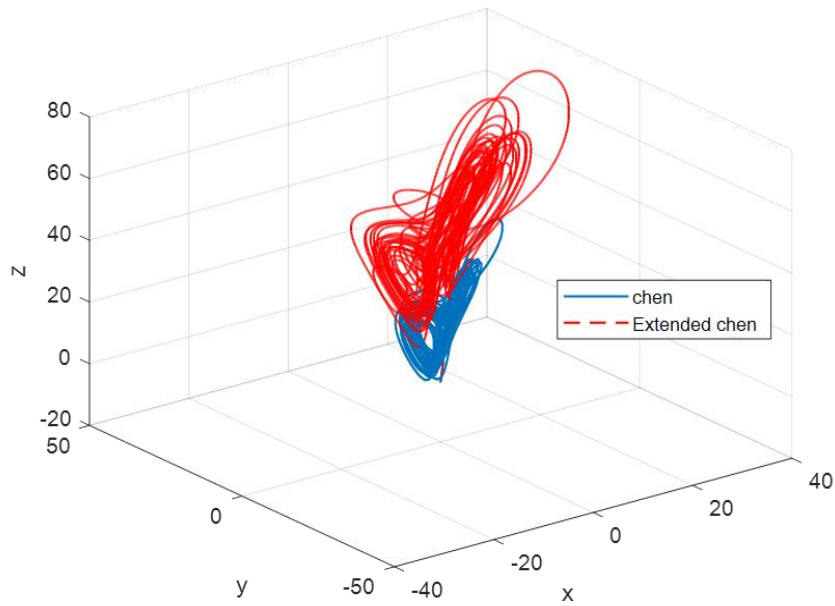
با توجه به شکل‌های (۱) تا (۴)، وجود رفتار آشوبناک در سیستم تعمیم یافته چن به وضوح قابل مشاهده است. این شکل‌ها تفاوت‌های مشخص میان رفتار سیستم تعمیم یافته چن و سیستم آشوبناک استاندارد چن را نشان می‌دهند، حتی با وجود اینکه هر دو سیستم تحت شرایط اولیه و پارامترهای یکسان مورد بررسی قرار گرفته‌اند. شکل (۱) حالت‌های دینامیکی هر دو سیستم را نشان می‌دهد، در حالی که شکل (۲) مقایسه‌ای از رفتار آن‌ها در فضای دوبعدی ارائه می‌دهد. شکل (۳) این مقایسه را به فضای سه‌بعدی گسترش داده و پیچیدگی و ماهیت پیچیده‌تر رفتار سیستم تعمیم یافته چن را آشکار می‌کند. در نهایت، شکل (۴) خطای بین حالت‌های این دو سیستم را نمایش می‌دهد که به وضوح تفاوت در مسیرهای آشوبناک آن‌ها را برجسته می‌کند. این نتایج بیانگر ویژگی‌های منحصر به فرد و پیچیدگی بیشتر سیستم تعمیم یافته چن در مقایسه با سیستم استاندارد چن هستند.



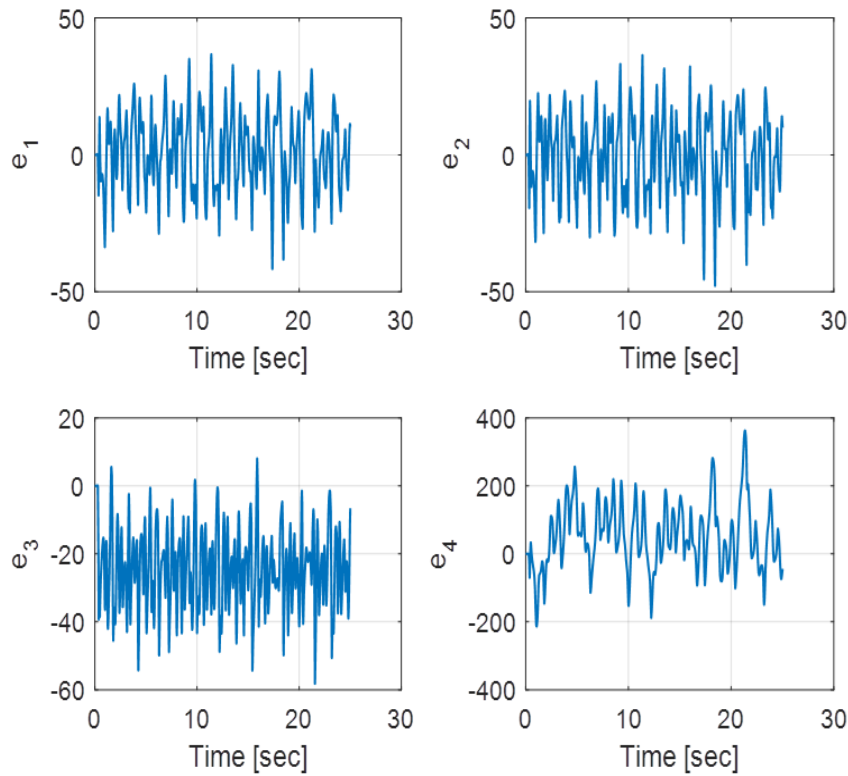
شکل (۱): متغیرهای حالت سیستم چن و سیستم تعمیم یافته چن
Figure (1): States of the Chen system and the extended Chen system



شکل (۲): حالت‌های سیستم چن و تعمیم یافته چن در فضای ۲ بعدی
Figure (2): States of the Chen system and the extended Chen system in 2D space



شکل (۳): حالت‌های سیستم چن و تعمیم‌یافته چن در فضای ۳ بعدی
 Figure (3): States of the Chen system and the extended Chen system in 3D space



شکل (۴): خطای بین حالت‌های سیستم چن و تعمیم‌یافته چن
 Figure (4): Error between the states of the Chen system and the extended Chen system

۴- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، یک سیستم فوق آشوبناک جدید مبتنی بر توسعه سیستم فوق آشوبناک چن معرفی شد. با استفاده از محاسبه نماهای لیپانوف و بررسی رفتار حلقه باز، رفتار فوق آشوبناک این سیستم به‌طور جامع تحلیل و اثبات گردید. نتایج نشان داد

که این سیستم، با دارا بودن پیچیدگی بیشتر نسبت به سیستم‌های آشوبناک مرسوم، در حوزه مخابرات امن بسیار کارآمد بوده و می‌تواند نقش مؤثری در افزایش امنیت شبکه‌های مخابراتی ایفا کند. مقایسه سیستم پیشنهادی با سیستم چن تحت شرایط اولیه و پارامترهای یکسان، تفاوت‌های قابل توجهی را در رفتار دینامیکی آن‌ها آشکار ساخت. نتایج شبیه‌سازی انجام‌شده در محیط نرم‌افزار MATLAB کارایی روش ارائه‌شده را به‌خوبی تأیید کرد.

پیشنهاد می‌شود در پژوهش‌های آتی، پیاده‌سازی عملی این سیستم به‌عنوان سیستم حامل در شبکه‌های مخابراتی مورد بررسی قرار گیرد تا امکان سنجش امنیت و عملکرد آن در شرایط واقعی فراهم شود.

References

مراجع

- [1] S. Payandeh Najafabadi S, M. Hashemi, "Adaptive Sliding Synchronization of Duffing-Holmes Fractional Order Chaotic Systems with Uncertainty and the Fractional Order Sliding Surface", *Journal of Novel Researches on Smart Power Systems*, vol. 10, no. 1, pp. 33-41, 2021 (in Persian).
- [2] L.-J. Sheu, L.-M. Tam, H.-K. Chen, and S.-K. Lao, "Alternative implementation of the chaotic Chen-Lee system, " *Chaos Solitons & Fractals*, vol. 41, no. 4, pp. 1923-1929, Sep. 2008 (doi: 10.1016/j.chaos.2008.07.053).
- [3] A. Darvish Falehi, "Analysis and Diagnosis of Partial Discharge of Power Capacitors Using Extension Neural Network Algorithm and Synchronous Detection Based Chaos Theory", *Journal of Novel Researches on Smart Power Systems*, vol. 9, no. 2, pp. 1-8, 2020 (in Persian).
- [4] S. Md. S. Rana, Md. J. Uddin, P. K. Santra, and G. S. Mahapatra, "Chaotic dynamics and control of a Discrete- Time CheN system, " *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2023, no. 1, Jan. 2023 (doi: 10.1155/2023/7795246).
- [5] S. Sahoo, S. A. Gebereselassie, R. Nathasarma, and B. K. Roy, "Maximization of degree of hyper-chaos of Lorenz hyper-chaotic system and its use for more secure image encryption, " *IFAC-PapersOnLine*, vol. 57, pp. 220-225, Jan. 2024 (doi: 10.1016/j.ifacol.2024.05.038).
- [6] K. I. A. Ahmed, H. D. S. Adam, N. Almutairi, and S. Saber, "Analytical solutions for a class of variable-order fractional Liu system under time-dependent variable coefficients, " *Results in Physics*, vol. 56, p. 107311, Jan. 2024 (doi: 10.1016/j.rinp.2023.107311).
- [7] F. E. Serrano, J. M. Munoz-Pacheco, and M. A. Flores, "Fractional-order projection of a chaotic system with hidden attractors and its passivity-based synchronization, " *Frontiers in Applied Mathematics and Statistics*, vol. 9, Sep. 2023 (doi: 10.3389/fams.2023.1267664).
- [8] D. Baleanu, G. Wu, and S. Zeng, "Chaos analysis and asymptotic stability of generalized Caputo fractional differential equations," *Chaos Solitons & Fractals*, vol. 102, pp. 99-105, Mar. 2017 (doi: 10.1016/j.chaos.2017.02.007).
- [9] E. Moradi, "Finite time stabilization of time-delay nonlinear systems with uncertainty and time-varying delay," *Journal of Control*, vol. 14, no. 2, pp. 79-87, Jun. 2020 (in Persian).
- [10] E. Moradi, M. R. Jahed-Motlagh, and M. B. Yazdi, "Delay-Dependent Finite-Time Stabilization of Uncertain Switched Time-Delay Systems with Norm-Bounded Disturbance, " *IETE Journal of Research*, vol. 64, no. 2, pp. 195-208, Aug. 2017 (doi: 10.1080/03772063.2017.1351898).
- [11] L. M. Pecora and T. L. Carroll, "Synchronization in chaotic systems, " *Physical Review Letters*, vol. 64, no. 8, pp. 821-824, Feb. 1990 (doi: 10.1103/physrevlett.64.821).
- [12] J. Gancio and N. Rubido, "Lyapunov exponents and extensivity of strongly coupled chaotic maps in regular graphs," *Chaos Solitons & Fractals*, vol. 178, p. 114392, Dec. 2023 (doi: 10.1016/j.chaos.2023.114392).
- [13] A. Roldán-Caballero et al., "Synchronization of a new chaotic system using adaptive control: design and experimental implementation, " *Complexity*, vol. 2023, pp. 1-22, Apr. 2023 (doi: 10.1155/2023/2881192).
- [14] S. Chen, F. Wang, and C. Wang, "Synchronizing strict-feedback and general strict-feedback chaotic systems via a single controller, " *Chaos Solitons & Fractals*, vol. 20, no. 2, pp. 235-243, Sep. 2003 (doi: 10.1016/s0960-0779(03)00370-9).

- [15] A. Biswas, S. Das, A. Abraham, and S. Dasgupta, "Design of fractional-order PI λ D μ controllers with an improved differential evolution," *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, vol. 22, no. 2, pp. 343–350, Sep. 2008 (doi: 10.1016/j.engappai.2008.06.003).
- [16] M. Watanabe and K. Sakai, "Delayed feedback control for chaotic vibration in nonlinear impact dynamics of bouncing agricultural tractor," *Scientific Reports*, vol. 13, no. 1, Jul. 2023 (doi: 10.1038/s41598-023-37916-1).
- [17] S. Eshaghi, N. Kadkhoda, and M. Inc, "Chaos control and synchronization of a new fractional laser chaotic system," *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, vol. 23, no. 5, Jul. 2024 (doi: 10.1007/s12346-024-01097-7).
- [18] H.-T. Yau, "Chaos synchronization of two uncertain chaotic nonlinear gyros using fuzzy sliding mode control," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 22, no. 2, pp. 408–418, Aug. 2007 (doi: 10.1016/j.ymsp.2007.08.007).
- [19] H. Cheng, H. Li, Q. Dai, and J. Yang, "A deep reinforcement learning method to control chaos synchronization between two identical chaotic systems," *Chaos Solitons & Fractals*, vol. 174, p. 113809, Jul. 2023 (doi: 10.1016/j.chaos.2023.113809).
- [20] S. Luo and R. Gao, "Chaos control of the permanent magnet synchronous motor with time-varying delay by using adaptive sliding mode control based on DSC," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 355, no. 10, pp. 4147–4163, Apr. 2018 (doi: 10.1016/j.jfranklin.2018.04.031).
- [21] A. Wolf, "13. Quantifying chaos with Lyapunov exponents," in *Princeton University Press eBooks*, 1986, pp. 273–290 (doi: 10.1515/9781400858156.273).
- [22] M.-F. Danca and N. Kuznetsov, "Matlab Code for Lyapunov Exponents of Fractional-Order Systems," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 28, no. 05, p. 1850067, May 2018, doi: 10.1142/s0218127418500670.